УДК 517

ВНЕШНЯЯ АЛГЕБРА *d*-ОПЕРАТОРА В ДРОБНОМ АНАЛИЗЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОРЯДКОВ

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Рассмотрены алгебраические свойства d-оператора при его воздействии на функции (внешняя алгебра). В частности, рассмотрено свойство коммутативности.

Ключевые слова:
Дробный анализ, дробный анализ целочисленных порядков, d-оператор.

Key words:
Fractional analysis, fractional analysis integer order, d-operator.

Введение

В процессе развития дробного анализа наибольшее внимание уделялось, прежде всего, нецелочисленным порядкам дробного дифференцирования и дробного интегрирования (дробного интегродифференцирования) [1–3]. Целочисленные порядки являются частным случаем дробных чисел, поэтому дробный анализ целочисленных порядков является частным случаем дробного анализа любых конечных вещественных порядков.

Ранее дробный анализ целочисленных порядков отличных от единицы серьёзно не рассматривался, а дробный анализ порядка единицы (стандартный анализ), в свою очередь, является наиболее разработанной частью целочисленного дробного анализа, который зародился и развивался «самостоятельно», вне дробного анализа.

Дробный анализ возник из желания обобщить стандартный анализ на случаи производных и интегралов вещественных порядков, прежде всего, нецелочисленных порядков.

Между дробным анализом целочисленных и нецелочисленных порядков имеются существенные различия. Поэтому имеет смысл рассмотреть более подробно особенности дробного анализа целочисленных порядков и его отличия от дробного анализа нецелочисленных порядков.

В работе [4] была введена последняя версия локального d-оператора дробного интегрирования и дробного дифференцирования, который распадается на *d-оператор нецелочисленных порядков* и *d-оператор целочисленных порядков*.

В развёрнутом виде d-оператор целочисленных порядков записывается в виде системы из восьми равенств, каждое из которых задаёт операции дифференцирования и интегрирования для конкретных сочетаний порядков интегродифференцирования и показателей степени степенных функций, на которые действует d-оператор.

$$\left\{\begin{aligned}
&d^{-m}x:x^{q}=\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-m+1)}x^{q-m};\\
&\quad m=0,1,2,\ldots;\ \ q\neq-1,-2,-3,\ldots;\\
&d^{-m}x:x^{-n}=\frac{(-1)^{m}(n+m-1)!}{(n-1)!}x^{-m-n};\\
&\quad n\in\mathbb{N};\ \ m=0,1,2,\ldots;\\
&d^{m}x:x^{q}=\frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+m+1)}x^{q+m}+C_{m}(x);\\
&\quad m=0,1,2,\ldots;\ q\neq-1,-2,-3,\ldots;\\
&d^{m}x:x^{-n}=\frac{(-1)^{m}(n-m-1)!}{(n-1)!}x^{m-n}+C_{m}(x);\\
&\quad m=0,1,2,\ldots;\ n\in\mathbb{N};\ m<n;\\
&d^{1}x:x^{-1}=\ln|x|+C_{1};\\
&d^{n}x:x^{-n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\ln|x|+C_{n}(x);\ n\in\mathbb{N};\\
&d^{k}x:\ln|x|=\frac{1}{k!}x^{k}\left(\ln|x|-\sum_{l=1}^{k}\frac{(k-l)!}{k-l+1}\right)+C_{k}(x);\\
&\quad k,l\in\mathbb{N};\\
&d^{m}x:x^{-n}=\frac{(-1)^{n-1}x^{m-n}}{(n-1)!(m-n)!}\times\\
&\times\left(\ln|x|-\sum_{l=1}^{m-n}\frac{(m-n-l)!}{m-n-l+1}\right)+C_{m}(x);\\
&\qquad\qquad m\geq n;\ m,n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}\right. \quad (*)$$

Здесь $C_m(x)$ – полином интегрирования для целочисленных порядков, который являются обобщением константы интегрирования в стандартном анализе, и имеет вид [5]

$$C_m(x)=\sum_{i=0}^{m-1}a_ix^i=$$
$$=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_{m-2}x^{m-2}+a_{m-1}x^{m-1}.$$

Здесь даны m вещественных констант интегрирования $a_0, a_1, a_2, ..., a_{m-1}$.

Следовательно, для целочисленных порядков в дробном анализе целочисленных порядков полиномы интегрирования являются алгебраические полиномы [6].

Для d-оператора целочисленного порядка $d^{-m}x$ полиномы интегрирования $C_m(x)$ будут иметь число слагаемых, равное порядку оператора интегрирования m.

Производная порядка m от полинома интегрирования порядка m, будет давать ноль

$$d^{-m}x : C_m(x) = 0.$$

В случае нецелочисленных порядков интегрирования, число слагаемых в полиномах интегрирования образует бесконечное счётное множество [5].

В d-операторе (*) *первое* и *второе* равенства определяют операции дифференцирования целочисленных порядков для степенных функций с нецелочисленными показателями степеней в первом случае и для показателей степеней степенной функции с целыми отрицательными значениями во втором случае.

С третьего по восьмое равенства в (*) описывают операции интегрирования целочисленных порядков.

Третье и четвёртое равенства определяют операции интегрирования целочисленных порядков для степенных функций с нецелочисленными показателями степеней в третьем равенстве и для показателей степеней с целыми отрицательными значениями, когда порядок оператора меньше модуля показателя степени показательной функции во втором случае.

С пятого по восьмое равенства в (*) определяют интегрирования целочисленных порядков для различных вариантов логарифмических случаев.

Пятое равенство постулирует интегрирование в наиболее простом из логарифмических случаев. Этот случай совпадает с таким же случаем в стандартном анализе.

Шестое равенство в (*) определяет интегрирование в логарифмическом случае, когда порядок оператора больше единицы и равен модулю показателя степени степенной функции, который имеет отрицательный знак.

Седьмое равенство определяет интегрирование натурального логарифма любого целочисленного порядка.

Восьмое равенство является наиболее общим и содержит в себе пятое, шестое и седьмое равенства, как частные случаи.

Внешняя алгебра *d*-оператора целочисленных порядков

Внутренняя алгебра выражает соотношения между d-операторами различных порядков в различных операциях. Внешняя алгебра d-операторов выражает отношение как между d-операторами различных порядков в различных операциях, так и функциям на которые они действуют.

В целочисленном дробном анализе внутренняя алгебра согласуется с внешней алгеброй, а нецелочисленном дробном анализе внешняя и внутренняя алгебра не всегда согласуются между собой [5].

Рассмотрим некоторые соотношения внешней алгебры d-оператора целочисленных порядков.

d-оператор является линейным, т. е. удовлетворяет условиям *однородности* и *аддитивности*.

1. Константу можно выносить из-под знака оператора или ставить под знак оператора (*однородность*)

$$d^{\pm n}x : af(x) = ad^{\pm n}x : f(x);\ a = \text{const}.$$

2.1. Аддитивность для случая сложения функций

$$d^{\pm n}x : (f(x) + g(x)) = d^{\pm n}x : f(x) + d^{\pm n}x : g(x).$$

2.2. Аддитивность для случая сложения операторов:

$$(d^{\pm n}x + d^{\pm m}x)f(x) = d^{\pm n}x : f(x) + d^{\pm m}x : f(x).$$

Рассмотрим действие композиций (произведения) d-операторов на функции.

В этом случае выполняется ещё одно важное свойство во внешней алгебре.

Теорема. Воздействие произведения трёх операторов на функцию $f(x)$ ассоциативно [5]

$$(d^{\pm n}x : d^{\pm m}x)d^{\pm k}x : f(x) = d^{\pm n}x : (d^{\pm m}x : d^{\pm k}x)f(x).$$

Справедливость данного равенства, проверяется простой подстановкой.

Теорема. Последовательное действие d-операторов $d^{\pm n}x$ и $d^{\pm m}x$ на функцию и действие композиции этих операторов $d^{\pm n \pm m}x$ на ту же функцию в общем случае не равны друг другу

$$d^{\pm n}x : d^{\pm m}x : f(x) \neq d^{\pm m}x : d^{\pm n}x : f(x).$$

В частности, справедлива теорема [5].

Теорема. Композиция и декомпозиция d-операторов дифференцирования (интегрирования) целочисленных порядков при их воздействии на функцию $f(x)$ дают одинаковый результат

$$d^m x : d^n x : f(x) = d^{m+n}x : f(x);$$

$$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

Данное утверждение в общем случае не выполняется, если один из операторов является оператором дифференцирования, а другой – оператором интегрирования.

Рассмотрим возможные случаи данного соотношения более подробно.

В случае целочисленных порядков будут справедливы формула разложения операторов интегрирования целочисленных порядков

$$d^m x : d^n x : f(x) = d^{m+n}x : f(x) = \mathrm{F}^{(m+n)}(x) + C_{m+n}(x).$$

Формула разложения операторов дифференцирования целочисленных порядков

$$d^{-m}x : d^{-n}x : f(x) = d^{-m-n}x : f(x) = f^{(m+n)}(x).$$

Два последних равенства можно записать одним равенством

$$d^{\pm m}x : d^{\pm n}x : f(x) = d^{\pm m \pm n}x : f(x).$$

Одним из основных свойств d-оператора целочисленных порядков, является их разложимость на операторы первого порядка [7]. Тогда в случае дифференцирования можно записать

$$d^{-n}x : f(x) = \underbrace{d^{-1}x : d^{-1}x : \dots d^{-1}x}_{n} : f(x) = f^{(n)}(x).$$

В случае интегрирования будет выполняться аналогичное разложение

$$d^{n}x : f(x) = \underbrace{d^{1}x : d^{1}x : \dots d^{1}x}_{n} : f(x) = \mathrm{F}^{(n)}(x) + C_n(x).$$

Эти два свойства выражают *принцип разложимости* операторов интегрирования (дифференцирования) целочисленного порядка n на n операторов интегрирования (дифференцирования) первого порядка.

В силу разложимости d-оператора на операторы первого порядка, все логарифмические случаи, как в дробном анализе целочисленных порядков, так и в стандартном анализе, совпадают, если d-оператор последовательно применять целое количество раз. Другими словами – шестое, седьмое и восьмое равенства являются следствием пятого равенства и принципа разложимости d-оператора на операторы первого порядка. Поэтому, без потери общности, (*) шестое, седьмое и восьмое равенства можно отбросить, но эти равенства записываются для удобства интегрирования в логарифмических случаях, которых бесконечное счётное множество.

Рассмотрим случаи, когда на первом месте стоит оператор дифференцирования, а вторым оператором является оператор интегрирования, тогда будут возможны случаи композиции операторов, которые запишем с использованием различных эквивалентных обозначений

$$d^{-m}x : d^{n}x : f(x) = d^{n-m}x : f(x) =$$

$$= \begin{cases} f^{(n-m)}(x) \equiv F^{(m-n)}(x);\ m > n; \\ F^{(n-m)}(x) \equiv F^{(0)}(x) \equiv f^{(n-m)}(x) \equiv \\ \quad \equiv f^{(0)}(x) \equiv f(x);\ m = n; \\ F^{(n-m)}(x) + C_{-m+n}(x) \equiv f^{(m-n)}(x) + C_{-m+n}(x);\ m < n. \end{cases}$$

Если на первом месте стоит оператор интегрирования, а на втором – оператор дифференцирования, тогда будут возможны следующие случаи композиции операторов с учётом различных обозначений

$$d^{m}x : d^{-n}x : f(x) = d^{m-n}x : f(x) =$$

$$= \begin{cases} f^{(m-n)}(x) + C_m(x) \equiv F^{(n-m)}(x) + C_m(x);\ m < n; \\ F^{(m-n)}(x) + C_m(x) \equiv F^{(0)}(x) + C_m(x) \equiv \\ \quad \equiv f^{(m+n)}(x) + C_m(x) \equiv \\ \quad \equiv f^{(0)}(x) + C_m(x) \equiv f(x) + C_m(x);\ m = n; \\ F^{(m-n)}(x) + C_m(x) \equiv f^{(n-m)}(x) + C_m(x);\ m > n. \end{cases}$$

Теорема. Композиция и декомпозиция d-операторов целочисленных порядков при их воздействии на функцию $f(x)$ в общем случае не будут равны между собой

$$d^{\pm m}x : d^{\mp n}x : f(x) \ne d^{\pm m \mp n}x : f(x).$$

Эти соотношения входят во внешнюю алгебру d-оператора целочисленных порядков [5].

Коммутативность и не коммутативность во внешней алгебре *d*-оператора целочисленных порядков

Рассмотрим свойства коммутативности для d-операторов целочисленных порядков.

Свойство коммутативности для операторов дифференцирования целочисленных порядков будет

$$d^{-n}x : d^{-m}x : f(x) = d^{-m}x : d^{-n}x : f(x).$$

Свойство коммутативности операторов интегрирования целочисленных порядков будет

$$d^{n}x : d^{m}x : f(x) = d^{m}x : d^{n}x : f(x).$$

Единичный d-оператор (нулевого порядка) коммутирует как с d-операторами дифференцирования и интегрирования любых вещественных порядков, в том числе целочисленных, включая нулевой порядок. В частности, для целочисленных порядков это можно записать

$$d^{0}x : d^{\pm n}x : f(x) = d^{\pm n}x : d^{0}x : f(x) = d^{\pm n}x : f(x).$$

Если один оператор будет оператором дифференцирования порядка n, а другой будет оператором интегрирования порядка m, и $m>n$, то, в зависимости от последовательности действия этих операторов на функцию, будут справедливы равенства

$$d^{-n}x : d^{m}x : f(x) = F^{(m-n)}(x) + C_{m-n}(x);$$

$$d^{m}x : d^{-n}x : f(x) = F^{(m-n)}(x) + C_{m}(x).$$

Из этих формул легко получить коммутатор для случая $m>n$

$$[d^{m}x, d^{-n}x] : f(x) = (d^{m}x : d^{-n}x - d^{-n}x : d^{m}x) : f(x) =$$

$$= F^{(m-n)}(x) + \tilde{C}_m(x) - F^{(m-n)}(x) - \tilde{C}_{m-n}(x) =$$

$$= \tilde{C}_m(x) - \tilde{C}_{m-n}(x) = C_m(x).$$

В другом случае, когда $n>m$, легко получить формулы перестановки операторов дифференцирования и операторов интегрирования

$$d^{-n}x : d^{m}x : f(x) = f^{(m-n)}(x);$$

$$d^{m}x : d^{-n}x : f(x) = f^{(m-n)}(x) + C_m(x).$$

Для коммутатора, когда $n>m$, получим

$$[d^{m}x, d^{-n}x] : f(x) = (d^{m}x : d^{-n}x - d^{-n}x : d^{m}x) : f(x) =$$

$$= f^{(m-n)}(x) + C_m(x) - f^{(-n+m)}(x) = C_m(x).$$

При перестановке оператора интегрирования и дифференцирования в коммутаторе, получим свойство *антисимметрии* коммутатора

$$[d^{m}x, d^{-n}x] : f(x) = -[d^{-n}x, d^{m}x] : f(x).$$

Коммутатор для случая, когда оба оператора являются операторами дифференцирования

$$[d^{-m}x, d^{-n}x] : f(x) =$$

$$= (d^{-m}x : d^{-n}x - d^{-n}x : d^{-m}x) : f(x) =$$

$$= f^{(-m-n)}(x) - f^{(-n-m)}(x) = 0.$$

Коммутатор для случая, когда оба оператора являются операторами интегрирования

$$[d^m x, d^n x] : f(x) = (d^m x : d^n x - d^n x : d^m x) : f(x) =$$
$$= F^{(m+n)}(x) + C_{m+n}(x) - F^{(n+m)}(x) - C_{n+m}(x) =$$
$$= C_{m+n}(x) - C_{n+m}(x) = 0.$$

В случае дифференцирования целочисленных порядков полиномов интегрирования будут справедливы формулы

$$d^{-n} x : C_m(x) = \begin{cases} C_{m-n}(x) \neq 0; & m \geq n; \\ 0; & m < n. \end{cases}$$

Для случая интегрирования целочисленных порядков полиномов интегрирования операторами будут справедливы аналогичные формулы

$$d^n x : C_m(x) = \tilde{C}_{n+m}(x) + \tilde{C}_n(x) = C_{n+m}(x).$$

Эти утверждения верны по причине того, что сумма порядков операторов дифференцирования и интегрирования равны нулю или целым отрицательным числам, т. е. попадают в полюсы гамма-функции.

Рассмотрим ещё некоторые простые правила дифференцирования и интегрирования в дробном анализе целочисленных порядков

$$d^{-n} x : f(ax) = a^n f(ax); \quad a = \text{const};$$
$$d^n x : f(ax) = a^{-n} F^{(n)}(ax) + C_n(x).$$

Эти формулы являются частными случаями формул дифференцирования и интегрирования любых вещественных порядков [5].

Также будут справедливы более общие формулы дифференцирования и интегрирования в дробном анализе целочисленных порядков

$$d^{-n} x : f(ax + b) = a^n f(ax + b); \quad a, b = \text{const};$$
$$d^n x : f(ax + b) = a^{-n} F^{(n)}(ax + b) + C_n(x).$$

Во внешней алгебре целочисленного дробного анализа имеется только одна причина не коммутативности операторов интегродифференцирования, как в стандартном анализе. В нецелочисленном дробном анализе имеется уже две причины не коммутативности операторов [5].

Из сказанного в данной работе справедливо сделать утверждение.

Теорема. Внешняя алгебра *d*-оператора относительно операции умножения операторов целочисленных порядков образует полугруппу с единицей (моноид), который является частично коммутативным моноидом.

Ассоциативность умножения операторов выполняется, имеется мультипликативная единица и в общем случае отсутствуют обратные элементы.

Частичная коммутативность появляется в случае, когда оба оператора являются или операторами дифференцирования, или операторами интегрирования, или один из операторов имеет нулевой порядок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка. – Минск: Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
3. Учайкин В.В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
4. Чуриков В.А. Локальный *d*-оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для дробного // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318. – № 2. – С. 5–10.
5. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе *d*-оператора. – Томск: Изд-во ТПУ, 2010. – 118 с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1969. – 431 с.
7. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, 2011. – 72 с.

Поступила 29.08.2011 г.